

Beachten Sie, dass es sich bei dieser Beispiel-FSP nur um eine Auswahl möglicher Aufgaben handelt. In jeder FSP können Aufgaben aus allen behandelten Aufgabenfeldern des ersten und zweiten Semesters gestellt werden.



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Beispiel einer Feststellungsprüfung in Mathematik für das Studienkolleg in Darmstadt



Hilfsmittel: Taschenrechner, nicht graphikfähig,
nicht programmierbar
einsprachiges Wörterbuch,
Formelblatt: 1 DIN A 4-Blatt, handschriftlich in Deutsch beschrieben.

Hinweis: Der Lösungsweg muss erkennbar sein.

Bearbeitungszeit: 180 min.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe: (38 Punkte)

Gegeben ist die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktionenschar $f_a(x) = \frac{(a+x)}{e^x}$, mit $a \in \mathbb{R}_0^+$.

- a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von $f_a(x)$ mit den Koordinatenachsen. (3P)
- b) Untersuchen Sie das Verhalten von $f_a(x)$ für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$. (1P)
- c) Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunktes und des Wendepunktes des Funktionsgraphen.
(Zwischenergebnis: $f''_a(x) = \frac{x+a-2}{e^x}$) (10P)
- d) Zeichnen Sie in einem gemeinsamen Koordinatensystem die Funktionsgraphen von $f_a(x)$ für $x \in [-2, 4]$. Wählen Sie dafür die speziellen Werte $a = 0$, $a = 1$ und $a = 2$.
Maßstab an beiden Achsen: 1 LE = 2 cm. (7P)
- e) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung $t_a(x)$ der Wendetangente, die zum Graphen der Funktion $f_a(x)$ gehört. (3P)
- f) Die Wendetangente und die positiven Koordinatenachsen schließen ein Dreieck ein. Bestimmen Sie a so, dass dessen Flächeninhalt maximal wird. Geben Sie auch diesen maximalen Flächeninhalt an. (9P)
- g) Berechnen Sie $\int_0^r f_a(x) dx$ für $r > 0$. (4P)
- h) Untersuchen Sie, ob der Grenzwert $\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_0^r f_a(x) dx \right]$ existiert. Falls ja, geben Sie ihn an. (1P)

Bitte wenden

2. Aufgabe: (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = x^4 + kx^3 + x^2$, mit $k \in \mathbb{R}_0^+$, $x \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie k so,

- a) dass $f_k(x)$ außer $x_1 = 0$ noch genau eine weitere Nullstelle $x_2 \neq 0$ hat. (2P)
- b) dass $f_k(x)$ genau drei verschiedene Nullstellen hat. (1P)
- c) dass $f_k(x)$ genau eine Nullstelle hat. (1P)

3. Aufgabe: (21 Punkte)

- a) Bestimmen Sie im kartesischen Koordinatensystem je eine Gleichung zweier unterschiedlicher

Ebenen, zu denen die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ parallel sind. (2P)

- b) g_c ist die Menge aller Geraden, die jeweils durch den Koordinatenursprung und den Punkt $(1 | -1 | c)$, mit $c \in \mathbb{R}$ verlaufen. Bestimmen Sie c so, dass die zugehörige Gerade die Ebene $E: 2x - 2y + z - 16 = 0$ nicht schneidet. Geben Sie für diesen Fall den Zusammenhang zwischen der Richtung der Geraden und den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ an. (3P)

- c) Die Ebene E aus Aufgabenteil b) und die Koordinatenebenen begrenzen eine dreiseitige Pyramide. Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide. (3P)

- d) Die Ebene F enthalte die z-Achse und die Geradenschar g_c aus Aufgabenteil b). Bestimmen Sie eine Parametergleichung und eine Normalengleichung von F . (3P)

- e) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Ebenen E und F . (2P)

- f) Berechnen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Ebene E und der Geraden

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (4P)$$

- g) Bestimmen Sie den Parameter m in der Gleichung der Geraden w so, dass w und h windschief

sind: $w: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ m \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \lambda, m \in \mathbb{R}. \quad (4P)$