

Schriftliche Feststellungsprüfung Mathematik

Beispiel für FSP, eFSP, vFSP

1. Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktionenschar

$$f_a(x) = \frac{a+x}{e^x} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}^{\geq 0}$$

Der Graph von f_a heißt G_{f_a} .

- Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen G_{f_a} mit den Koordinatenachsen.
- Untersuchen Sie das Verhalten von f_a für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$.
- Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunktes und des Wendepunktes.

$$\left(\text{Zwischenergebnis : } f_a''(x) = \frac{x+a-2}{e^x} \right)$$

- Skizzieren Sie die zu $a = 1$, $a = 0$ und $a = 2$ gehörenden Graphen im Intervall $[-2; 4]$
(Für die Zeichnung: Ursprung in die Mitte des Blattes; 1 LE = 2 cm).
- Stellen Sie die Gleichung der Wendetangente t_a auf, die zum Graphen der Funktion f_a gehört.
- Die Wendetangente und die positiven Koordinatenachsen bestimmen ein Dreieck.
Für welches a erreicht seine Fläche ein Maximum?
- Berechnen Sie für $R > 0$

$$\int_0^R f_a(x) dx$$

h) Existiert der Grenzwert

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f_a(x) dx ?$$

2. Gegeben sind die Funktionen $f_k(x) = x^4 + kx^3 + x^2$, $k \in \mathbb{R}^{\geq 0}$.

- Welche Zahl ist für k zu wählen, damit f_k außer $x_1 = 0$ noch genau eine weitere Nullstelle x_2 hat?
Geben Sie x_2 an.
- Für welche Zahlen k hat f_k drei Nullstellen bzw. nur eine Nullstelle?

3. a) Bestimmen Sie Gleichungen der Ebenen, die zu

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

parallel sind und vom Punkt $Q (0 / 0 / 7)$ den Abstand 3 haben.

- b) g_c sind Ursprungsgeraden durch $(1 / -1 / c)$. Welche Gerade schneidet die Ebene

$$E : 2x - 2y + z - 16 = 0 \text{ nicht ?}$$

Welcher Zusammenhang besteht dann zwischen der Richtung von g_c und den Vektoren \vec{u} und \vec{v} ?

- c) Die Ebene F enthalte die z -Achse und die Geradenschar g_c aus Aufgabenteil b).
Bestimmen Sie die Parametergleichung und die Normalengleichung von F .
- d) E und die Ebenen des Koordinatensystems begrenzen ein Tetraeder T .
Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders.
- e) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Ebenen E und F .
- f) Berechnen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Ebene E und der Geraden

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- g) Berechnen Sie den Abstand von Q und h .
- h) Bestimmen Sie den Parameter m in der Gleichung der Geraden w so, dass w und h windschief sind

$$w: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ m \\ 6 \end{pmatrix}$$